Estudios de Economía Aplicada
Asociación de Economía Aplicada, (ASEPELT)
secretaria.tecnica@revista-eea.net
ISSN (Versión impresa): 1133-3197
ISSN (Versión en línea): 1697 - 5731
ESPAÑA

2004
Julio Angel Afonso Rodríguez / Néstor Amadeo Bruno Pérez / J. Giner Rubio
UN ANÁLISIS UNIVARIANTE Y MULTIVARIANTE DE LA DIVERSIFICACIÓN DE CARTERAS BAJO HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONADA
Estudios de Economía Aplicada, agosto, año/vol. 22, número 002
Asociación de Economía Aplicada, (ASEPELT)
Madrid, España
pp. 1-25

ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 22 - 2, 2004. PÁGS. 1-25

Un análisis univariante y multivariante de la diversificación de carteras bajo heterocedasticidad condicionada

AFONSO RODRÍGUEZ, J. A.(*); BRUNO PÉREZ, N. A.(**); GINER RUBIO, J.(**)
[*]*Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría;*
[**]*Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultad de CC. Económicas y Empresariales. Universidad de La Laguna.*
Universidad de La Laguna. 38071 – Santa Cruz de Tenerife. Telf.: 922 31 71 02; [**]E-mail: jginer@ull.es

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar cómo la diversificación de carteras construidas en base a principios *naive* (ingenuos) afecta al riesgo específico de las mismas en el marco del modelo de mercado de un solo índice cuando los términos de perturbación del modelo son condicionalmente heterocedásticos. En base al estudio de la versión univariante de este modelo construiremos una medida del riesgo específico asociada al grado de diversificación de la cartera a partir de la estimación de la varianza condicional heterocedástica, volatilidad. En el marco multivariante, una generalización de esta medida permitirá analizar por un lado el efecto de la evolución temporal de la varianza condicional, y por otro lado la relación temporal contemporánea, co-volatilidad, existente entre los títulos de cada cartera particular considerada en cada etapa del análisis.

Palabras Clave: Diversificación, Carteras, Riesgo específico, Heterocedasticidad Condicional, Correlación Condicional

Univariate and Multivariate Analysis of The Diversification of Portfolios Under Conditional Heteroscedasticity

ABSTRACT

In this work we analyse how the diversification of portfolios based on naive principles affects their specific risks within the framework of a single index market model, where the disturbance term in such model is conditionally heteroscedastic. Based on an analysis of the univariate version of this model, we will determine a measurement of the specific risk associated to the degree of diversification of the portfolio, starting from an estimation of the heteroscedastic conditional variance, volatility. In a multivariate framework, a generalisation of this measure will permit not only to identify the evolution in time of the conditional variance, but also the contemporary relation in time, covolatility, existent between the securities selected to make up each individual portfolio considered in each step of the analysis.

Keywords: Diversification, Portfolios, Specific Risk, Conditional Correlation, Conditional Heteroscedasticity

Clasificación JEL: C32, G11

Artículo recibido en octubre de 2004 y aprobado en julio de 2004.
La referencia electrónica de este artículo en la página www.revista-eea.net, es e-22212.

ISSN 1697-5731 (online) – ISSN 1133-3197 (print)

1. INTRODUCCION

La teoría de cartera, que iniciaran autores como Markowitz (1952 y 1959), Tobin (1958), Sharpe (1963, 1964) Lintner (1965), Treynor, (1965) y Mossin (1966), lleva consigo una serie de principios que se han convertidos en pilares en la economía financiera, y que se han extendido más allá del ámbito investigador al del común conocimiento de todos los que nos interesamos por las finanzas.

Uno de los aspectos que más aceptación ha recibido se refiere a la existencia de una relación inversa entre el riesgo derivado de la inversión en una cartera de $n > 0$ títulos y el número de títulos. Dicha relación se ha comprobado que existe aún cuando la estrategia consiste únicamente en incrementar el número de títulos de la cartera sin fijarse en las características particulares de rendimiento y riesgo de los mismos. Desde el punto de vista estadístico la justificación es bastante simple: la varianza (como medida del riesgo) de una combinación lineal de variables aleatorias independientes igualmente ponderadas es inversamente proporcional a la combinación lineal de las varianzas de cada variable considerada, en un factor de n^{-2}.

Esta circunstancia es aceptada, tanto para la hipótesis de homocedasticidad en la perturbación aleatoria del modelo de mercado como para la hipótesis de independencia o no entre tales términos de perturbación cuando el modelo de mercado pretende explicar el rendimiento generado por una cartera formada por un conjunto particular de títulos. Y es aquí donde se nos plantean los dos interrogantes que dan origen a nuestro trabajo:

a) ¿se observa tal disminución del riesgo específico de una cartera *naive* (ingenua) si estamos en el caso de heterocedasticidad condicional no constante en las perturbaciones del modelo de mercado al incrementar la diversificación de la misma?

b) cuando se postula que tales términos de perturbación presentan además relaciones contemporáneas (en el mismo instante del tiempo) que pueden considerarse variables en el tiempo (correlación contemporánea condicional variable), ¿se observa también tal reducción en el riesgo específico y en las mismas proporciones que en el caso anterior?

Así, las respuestas a ambas preguntas serán el objetivo que nos planteamos resolver a lo largo de nuestra investigación. El trabajo se estructura así en cinco apartados. En primer apartado tratamos históricamente el planteamiento del modelo de mercado (modelo diagonal de Treynor (1965)), que servirá de base para la generalización de los resultados relativos a la medición del grado de diversificación de una cartera, mencionados anteriormente. Esta generalización se plantea en el segundo epígrafe bajo la denominación de el Modelo de Mercado con Heterocedasticidad Condicional Dinámica (*HCD*) y que en el tercer apartado nos permite formular las herramientas particulares que desarrollamos en este trabajo para tal fin. El apartado cuarto consiste en una aplicación de las versiones univariante y multivariante del modelo de mercado en la formación de carteras ingenuas y posterior medición del riesgo específico a dos conjuntos de títulos (de $N_1 = 90$ y $N_2 = 35$ activos) seleccionados aleatoriamente en el contexto del mercado bursátil español durante el período 2.01.95 a 31.05.00, con un total de 1357 observaciones para el rendimiento diario de los títulos considerados y donde utilizamos como proxy de la cartera de mercado el Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM) observado durante el mismo período. El quinto y último apartado presenta las conclusiones principales de este trabajo y posibles limitaciones y extensiones.

2. DIVERSIFICACIÓN DE CARTERAS

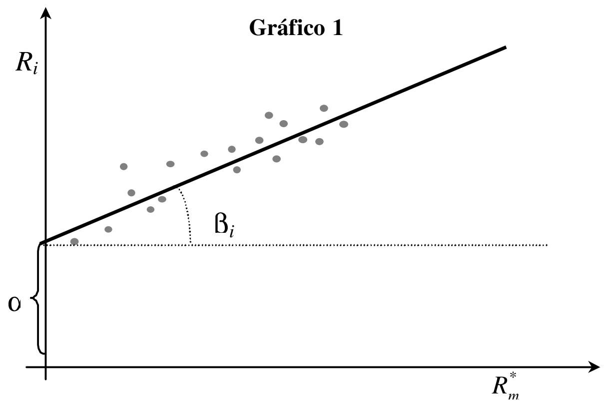
Sharpe (1963) para facilitar la aplicación práctica del modelo de Markowitz (1952, 1959) supone la dependencia estadística entre la rentabilidad de un título y un índice o un grupo de índices. Esta circunstancia da origen al denominado modelo diagonal, que Treynor (1965) modifica al tomar como índice la rentabilidad de la cartera de mercado $R_{m,t}$, con lo que aparece el modelo de mercado, que se expresa de la siguiente forma:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (i = 1,...,N, t = 1,...,T) \qquad \textbf{(1)}$$

siendo $R_{i,t}$ el rendimiento del título i-ésimo, $R_{m,t}$ el índice representativo de la situación del mercado, $\varepsilon_{i,t}$ la perturbación aleatoria que se supone de media nula e incorrelacionada, β_i es el parámetro que indica la sensibilidad del título con respecto a la evolución del mercado, y α_i parámetro que índica la parte de rentabilidad del título que es independiente de $R_{m,t}$.

La representación lineal de la nube de puntos de la rentabilidad de los títulos con respecto a la rentabilidad del mercado se denomina *línea característica de un título*, que tendrá como pendiente la sensibilidad de la rentabilidad del título respecto al mercado. (Gráfico 1)

Gráfico 1



El valor de β_i expresa la pendiente de la línea característica, también mide la sensibilidad del tipo de la rentabilidad del título en relación a las variaciones de la rentabilidad del mercado. Si un título alcanza un valor inferior a 1 en su β_i se dice que es un título defensivo (un incremento (reducción)del 1% en el tipo de rentabilidad del mercado implica un incremento (reducción) inferior al 1% en la rentabilidad del título). Por otra parte un valor superior a 1 en β_i caracteriza al título como agresivo (una disminución (aumento) del 1% en el tipo de rentabilidad del mercado implica un descenso (aumento) mayor en el tipo de rentabilidad del título). Tenemos así una definición precisa para el riesgo sistemático medido por este coeficiente, es decir:

$$\beta_i = Cov(R_{i,t}, R_{m,t})/Var(R_{m,t}) = C_{i,m}/\sigma_m^2 \tag{2}$$

La incertidumbre en el modelo de mercado se debe a que no se conoce con certeza el valor real de $R_{m,t}$ y que el grado de divergencia entre el punto real y la línea característica del título es incierto. A estas dos fuentes de incertidumbre se les suele dar la denominación de **riesgo sistemático** (por lo tanto, no reducible por la diversificación), medido por la "beta" del título, β_i, y **riesgo no sistemático o específico**, medido por la varianza del término de perturbación, $Var(\varepsilon_{i,t})$. Si sólo fueran factibles los puntos situados en la línea característica, el riesgo sistemático sería la única fuente de incertidumbre, este tipo de riesgo lo podemos representar como $\sigma_{i,s}^2 = \beta_i^2\sigma_m^2$ donde $\sigma_m^2 = Var(R_{m,t})$. En caso de que nos encontrásemos ante el caso de una cartera formada por $n \leq N$ títulos, la relación entre riesgo sistemático y volatilidad es la misma. Así tendríamos $\sigma_{n,s}^2 = \beta_n^2\sigma_m^2$. El riesgo no sistemático se definirá, por tanto, como la diferencia entre el riesgo total y el sistemático, es decir $\sigma_{i,0}^2 = \left(\sigma_i^2 - \sigma_{i,s}^2\right)$, donde $\sigma_i^2 = Var(R_{i,t})$.

Si queremos extender el calculo del riesgo para el modelo de mercado, y si suponemos que los términos $\varepsilon_{i,t}$ son serialmente independientes

$$E(\varepsilon_{i,t} \cdot \varepsilon_{j,t-k}) = 0 \text{ para todo } i, j = 1, ..., n,\ k > 0 \tag{3}$$

y, además, se determinan independientemente de la rentabilidad del mercado

$$E(\varepsilon_{i,t}|R_{m,t-k}) = 0 \text{ para todo } k \geq 0$$

entonces, el modelo de mercado que explicará el rendimiento de una cartera formada por n títulos, donde cada título tiene una ponderación x_i, vendrá expresada por la siguiente ecuación:

$$R_{n,t} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + R_{m,t}\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_{i,t} = \overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n R_{m,t} + \overline{\varepsilon}_{n,t} \tag{4}$$

Tenemos así que

$$E(R_{n,t}) = \overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n E(R_{m,t}) + E(\overline{\varepsilon}_{n,t}) = \overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n R_m$$
$$\tilde{R}_{n,t} = R_{n,t} - E(R_{n,t}) = \overline{\beta}_n (R_{m,t} - E(R_{m,t})) + \overline{\varepsilon}_{n,t} = \overline{\beta}_n \tilde{R}_{m,t} + \overline{\varepsilon}_{n,t}$$
$$Var(R_{n,t}) = E(\tilde{R}^2_{n,t}) = \overline{\beta}^2_n E(\tilde{R}^2_{m,t}) + E(\overline{\varepsilon}^2_{n,t}) + 2\overline{\beta}_n E(\overline{\varepsilon}_{n,t}\tilde{R}_{m,t})$$

donde por la estacionariedad del proceso generador de datos del término de perturbación y la ortogonalidad entre éste y $R_{m,t}$, se tiene entonces que el riesgo total asociado a la cartera n-ésima viene dado por

$$\sigma^2_n = \overline{\beta}^2_n \sigma^2_m + \sigma^2_{n,0} \tag{5.1}$$

donde

$$\overline{\beta}^2_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \beta_i \beta_j \text{ (riesgo sistemático)} \tag{5.2}$$

$$\sigma^2_{n,0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov(\varepsilon_{i,t}\varepsilon_{j,t}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij,0} \text{ (riesgo específico)} \tag{5.3}$$

o bien

$$\sigma^2_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma^2_{i,0} \tag{5.4}$$

bajo el supuesto de independencia.

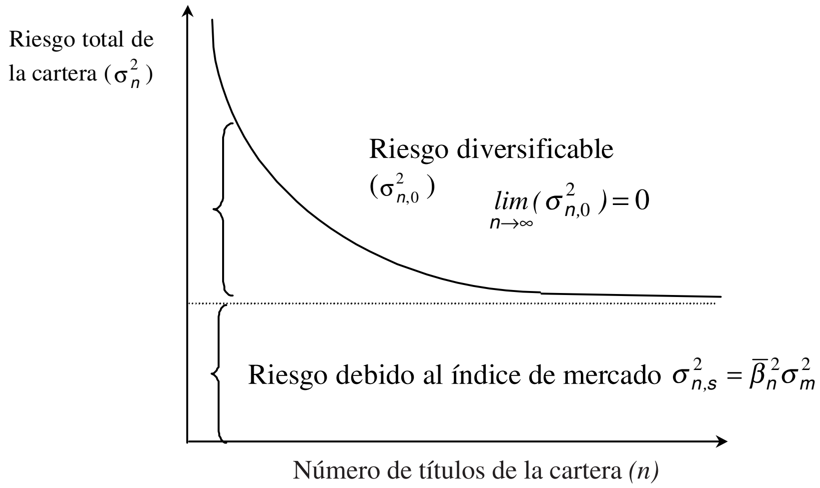
Si se considera una cartera diversificada con la misma proporción para cada uno de los títulos, es decir $x_i = 1/n$ para todo $i = 1, ..., n$, se tiene entonces que el riesgo específico de la cartera viene dado en cada caso por

$$\sigma^2_{n,0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sigma_{ij,0}}{n}\right) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma^2_{i,0}}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\sigma_{ij,0}}{n}\right)\right\} \quad (n>1) \tag{5.3´}$$

$$\sigma^2_{n,0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma^2_{i,0}}{n}\right) \tag{5.4´}$$

Por lo tanto, en el caso de una diversificación por partes iguales, el riesgo específico representa la n-ésima parte del valor medio de las $n(n+2)$ covarianzas distintas, (5.3´), de las perturbaciones aleatorias de los títulos que componen la cartera. De esta manera para una cartera compuesta por un número infinito de títulos su incertidumbre se limitará al riesgo sistemático, que vendrá dado por $\sigma^2_{n,s} = \overline{\beta}^2_n \sigma^2_m$, como aparece en el Gráfico 2.

Gráfico 2



Estas aportaciones teóricas se ha venido ratificando en la práctica. Así en un estudio realizado por Evans (1968), que utilizó 470 títulos del índice Standard and Poor's 500, para el periodo 1958 a 1967, sobre la base de la formación de carteras de tamaño creciente, es decir, $n_i = n_{i-1} + 1$ ($n_0 = 0$) ($i = 1, ..., 60$), se observa que, a medida que la diversificación aumenta, la desviación típica del tipo de rentabilidad desciende hasta alcanzar un nivel que interpreta como la desviación típica de la cartera de mercado. Además, llega a la conclusión de que con un número razonablemente pequeño de títulos, se puede alcanzar una diversificación adecuada. Por ejemplo con 20 títulos alcanza una diversificación de sólo un 3 % más de riesgo que el mínimo.

Por otra parte, un estudio realizado por King (1966) proporciona mayor claridad sobre la relación entre las fluctuaciones del mercado y el riesgo de un título. Sobre 63 acciones ordinarias con tipos de rentabilidades mensuales que van desde junio de 1927 a diciembre de 1960, tomando como cartera mercantil la media de los 63 títulos, obtuvo unos resultados que indican que las fluctuaciones del mercado explicaron el 52 % de la varianza, mientras que con un grupo de índices industriales sólo alcanzó un 11 %.

Wagner y Lau (1971) demostraron los efectos de la diversificación trabajando con una muestra de 200 acciones de NYSE que dividieron en 6 subgrupos con calidades semejantes según las evaluaciones de Standandar and Poor's del mes de junio de 1960. Posteriormente, construyeron carteras a partir de cada uno de los subgrupos, empleando de 1 a 20 valores aleatoriamente seleccionados, y mediante la atribución de pesos iguales a cada valor.

A medida que aumentó el número de valores dentro de la cartera, la desviación estándar de los rendimientos de la misma disminuyó, pero a una tasa decreciente, ya que las reducciones de riesgo fueron relativamente más pequeñas después de que se incluyeran aproximadamente 10 valores en la cartera. Además, a medida que se fue aumentando el número de títulos la correlación con el mercado fue aproximándose a la unidad. Entre las conclusiones a las que llegaron Wagner y Lau (1971) está que aún las carteras bien diversificadas poseen algún nivel de riesgo que no puede ser diversificado, tal como habíamos mostrado en el gráfico 2.

Para el caso español Gómez-Bezares, Madariaga y Santibañes (1994 y 1999), al considerar que con 20 títulos tomados al azar el riesgo diversificable puede ser eliminado, deciden comprobarlo en el mercado bursátil español; para ello construyen carteras aleatorias formadas por dos, tres, cuatro hasta llegar a treinta y nueve valores, calculando en cada uno de ellos el riesgo total que aportarían a su propietario. Gómez-Bezares, Madariaga y Santibañes (1994 y 1999) en un paso posterior, calculan los promedios del riesgo asociado a cada una de estas carteras mencionadas, comparando este promedio con el riesgo de la cartera de mercado no ponderada, al que consideran como riesgo sistemático, consiguiendo decrementos significativos desde carteras de 10 títulos, a partir de los cuales, la ganancia obtenida es mínima.

3. EL MODELO DE MERCADO CON HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL DINÁMICA (*HCD*)

En este trabajo, nuestro objetivo se centrará, a diferencia de lo expuesto anteriormente, en la distribución condicional del proceso que describe el rendimiento del título (o cartera) *i*-ésimo (*n*-ésima) explicado por el modelo de mercado, ecuación ***(1)***,dado el conjunto de información muestral formado por los valores históricos de las series ($R_{m,t}$, $\varepsilon_{i,t}$). Formalmente, sea $\boldsymbol{R}_{im,t}$ el vector bidimensional de observaciones temporales de los procesos $(R_{i,t}, R_{m,t})'$ y $\Omega_{im,t\text{-}1}$ el vector unidimensional formado por el conjunto de observaciones muestrales

$$\Omega_{im,t\text{-}1} = \{R_{m,t\text{-}k};\ \varepsilon_{i,t\text{-}k}\text{: } k > 0\}$$

Se tiene entonces que, bajo el supuesto de normalidad bivariante condicionada,

$$\boldsymbol{R}_{im,t}|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N_2(\mu_{im,t}, \mathrm{S}_{im,t})$$

donde

$$\mu_{im,t} = E(\boldsymbol{R}_{im,t}|\Omega_{im,t\text{-}1}) = E_{t\text{-}1}(\boldsymbol{R}_{im,t})$$

$$\mathrm{S}_{im,t} = Var(\boldsymbol{R}_{im,t}|\mathrm{W}_{im,t\text{-}1}) = Var_{t\text{-}1}(\boldsymbol{R}_{im,t}) = \begin{pmatrix} h_{i,t} & h_{im,t} \\ h_{mi,t} & h_{m,t} \end{pmatrix}$$

Haciendo uso entonces del resultado conocido de que bajo normalidad multivariante condicionada, cada componente del vector aleatorio $\boldsymbol{R}_{im,t}$ se distribuye condicionalmente normal univariante

$$R_{i,t}|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N(\mu_{i,t}, h_{i,t}) \qquad R_{m,t}|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N(\mu_{m,t}, h_{m,t})$$

y que la distribución de una de las componentes del vector aleatorio condicionalmente Gaussiano condicionada a las observaciones de cualquier otra de las componentes también es condicionalmente normal, tenemos entonces que

$$(R_{i,t}\backslash R_{m,t} = r_{m,t})|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N\left(\mu_{i,t} + (r_{m,t} - \mu_{m,t})\rho_{im,t}\sqrt{\frac{h_{i,t}}{h_{m,t}}}, h_{i,t}(1-\rho^2_{im,t})\right)$$

es decir,

$$(R_{i,t}\backslash R_{m,t} = r_{m,t})|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N\left(\mu_{i,t} + \beta_{i,t}R_{m,t},\ h_{i,t}\left\{1-\beta^2_{i,t}\left[\frac{h_{m,t}}{h_{i,t}}\right]\right\}\right)$$

lo que nos permite especificar la siguiente versión modificada del Modelo de Mercado *Condicional*,

$$R_{i,t} = \mu_{i,t} + \beta_{i,t}R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad \textbf{(6)}$$

donde

$$\beta_{i,t} = Cov_{t\text{-}1}(R_{i,t}, R_{m,t})/Var_{t\text{-}1}(R_{m,t}) = h_{im,t}/h_{m,t} \qquad \textbf{(7)}$$

Si mantenemos el supuesto de exogeneidad entre el término de perturbación, $\varepsilon_{i,t}$, y $R_{m,t}$, entonces podemos realizar el siguiente supuesto simplificador

$$\varepsilon_{i,t}|\Omega_{im,t\text{-}1} \sim N(0, h_{i,t}) \qquad \textbf{(8.1)}$$

donde la función de varianza condicional variable en el tiempo (dinámica)

$$h_{i,t} = Var_{t\text{-}1}(R_{i,t}|R_{m,t}) = Var_{t\text{-}1}(\varepsilon_{i,t}) \qquad \textbf{(8.2)}$$

se identifica habitualmente con el término “volatilidad”, pero que en el presente contexto denominaremos más genéricamente función de *Heterocedasticidad Condicional Dinámica* (*HCD*). El trabajar con un modelo de regresión como (6) donde la perturbación presenta una variabilidad no constante en sus momentos de segundo orden no plantea ninguna restricción seria para nuestro principal objetivo, que proporcionar una medida del riesgo específico, si consideramos la aplicación de la *Ley de Expectativas Iteradas*, de forma que la varianza de la distribución incondicional del término de perturbación del modelo *i*-ésimo viene dada por $h_{i,0} = E[E_{t-1}(\varepsilon^2_{i,t})] = E[h_{i,t}] < \infty$, donde la existencia de este momento dependerá únicamente de la parametrización particular que se adopte para la función $h_{i,t}$, y del cumplimiento de ciertas restricciones impuestas sobre los coeficientes de la misma para asegurar la estacionariedad de segundo orden del proceso $\varepsilon_{i,t}$.

Para obtener el modelo que finalmente será objeto de tratamiento en este trabajo tenemos que realizar un último supuesto simplificador en (6) que se refiere a la presencia de coeficientes posiblemente aleatorios. De forma genérica, tenemos entonces la siguiente especificación del modelo de mercado objeto de análisis:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad \textbf{(6´)}$$

$$\varepsilon_{i,t} = Z_{i,t}, \sqrt{h_{i,t}} \quad Z_{i,t} \sim i.i.d.N(0,\, 1) \text{ e independiente de } \varepsilon_{i,t} \qquad \textbf{(9)}$$

donde la función de varianza condicional viene determinada por una parametrización tipo (*G*)*ARCH* debida inicialmente a Engle (1982) y Bollerslev (1986), de la forma $GARCH(p_i, q_i)$:

$$h_{i,t} = \omega_{i,0} + \sum_{u=1}^{p_i} \omega_{i,u}\varepsilon^2_{i,t-u} + \sum_{v=1}^{q_i} \theta_{i,v} h_{i,t-v} \qquad \textbf{(10)}$$

o, alternativamente, como

$$\left(1 - \sum_{v=1}^{q_i} \theta_{i,v} L^v\right) h_{i,t} = \omega_{i,0} + \left(\sum_{u=1}^{p_i} \omega_{i,u} L^u\right) \varepsilon^2_{i,t-u} \quad \Theta_{q_i}(L) h_{i,t} = \omega_{i,0} + \Omega_{p_i}(L)\varepsilon^2_{i,t}$$

donde $\omega_{i,0} > 0$, $\omega_{i,u} \geq 0$ ($u = 1, ..., p_i - 1$) $\omega_{i,pi} > 0$, $\theta_{i,v} \geq 0$ ($v = 1, ..., q_i \geq 0$) son condiciones necesarias para asegurar la positividad de la función de varianza condicional, y $0 < 1 + \{\Omega_{p_i}(1) - \Theta_{q_i}(1)\} < 1$ es la condición necesaria para la estacionariedad débil de la distribución condicional del proceso $\varepsilon_{i,t}$. Así, si en ***(10)*** $\theta_{i,v} = 0$ ($v = 1, ..., q_i$) entonces se tiene el proceso $ARCH(p_i)$ estándar de Engle (1982). Bajo estas condiciones, tenemos entonces que

$$h_{i,0} = Var[\varepsilon_{i,t}] = \omega_{i,0}\left(1 - \sum_{u=1}^{M_i} \pi_{i,u}\right)^{-1} \; donde\ \pi_{i,u} = \begin{vmatrix} \omega_{i,u} + \theta_{i,u} & 1 \leq u \leq m_i = min(p_i, q_i) \\ \omega_{i,u} & m_i = q_i < u \leq p_i \\ \theta_{i,u} & m_i = p_i < u \leq q_i \\ 0 & u > M_i = max(p_i, q_i) \end{vmatrix}$$

Muchas otras parametrizaciones son posibles, entre otras aquéllas que incorporan la posibilidad de respuestas asimétricas de la función de varianza condicional al signo de las perturbaciones y no únicamente al tamaño (como por ejemplo el modelo *GARCH Exponencial –EGARCH* - de Nelson (1991), o el modelo *ARCH Threshold – TARCH* – de Glosten *et.al* (1993) y Rabemananjara y Zakoian (1993)). Para una revisión más extensa de la especificación, propiedades, estimación y aplicaciones de modelos de *HCD* tipo *ARCH* pueden consultarse los trabajos de Bollerslev, *et al* (1992) y Diebold y Lopez (1995).

Sin embargo, este modelo permite capturar dos de los aspectos empíricos más relevantes de las series temporales económicas observadas en frecuencias elevadas, que son el exceso de curtosis incondicional

$$\kappa_i = \frac{E(\varepsilon_{i,t}^4)}{[E(\varepsilon_{i,t}^2)]^2} = 3 + 3\cdot\frac{Var(h_{i,t})}{h_{i,0}} \geq 3$$

bajo el supuesto de normalidad condicional dado en ***(9)***, y el fenómeno de la agrupación de volatilidad, es decir, el hecho de que períodos de alta (baja) "volatilidad" suelen ser seguidos igualmente por períodos de alta (baja) "volatilidad". Así, tenemos que, en el modelo $GARCH(p_i,q_i)$

$$(h_{i,t} - h_{i,0}) = \sum_{u=1}^{p_i} \omega_{i,u}(\varepsilon_{i,t-u}^2 - h_{i,0}) + \sum_{v=1}^{q_i} \theta_{i,v}(h_{i,t-v} - h_{i,0})$$

de forma que si el instante *t* se observa una dispersión superior al "promedio", éste episodio "volátil" vendrá explicado por la observación de este mismo fenómeno en la historia de la serie. Por otro lado, la especificación del modelo de mercado con coeficientes constantes y perturbaciones condicionalmente heterocedásticas, (6´), frente al modelo (6), podría justificarse inicialmente por la extrecha relación que existe entre los modelos de coeficientes aleatorios y los modelos con *HCD*, como puede verse, entre otros, en Wolff (1988), Bera y Lee (1993) y Bera y Higgins (1995)[1]. Como paso previo al análisis de la estimación del riesgo específico en carteras si-

1. Sobre la base del modelo inicialmente derivado, ecuación ***(6)***, hemos aplicado una serie de procedimientos habituales en la literatura econométrica para tratar de determinar a priori la posibilidad de incorporar la aleatoriedad en los coeficientes del modelo de mercado, como son los contrastes basados en residuos recursivos *MCO CUSUM* y *CUSUMQ*, de Brown *et.al* (1975) y el contraste de Fluctuaciones de Ploberger *et.al* (1989), cuyos resultados pueden solicitarse a los autores. Afonso Rodríguez, J., N. Bruno P. y J. Giner (2000).- *Utilización de los Contrastes CUSUM-CUSUMQ y del Contraste de Fluctuaciones en el Modelo de Mercado*. Manuscrito sin publicar.

guiendo la metodología propuesta, realizamos una serie de precontrastes de la hipótesis de *HCD* sobre los residuos mínimo cuadráticos, $e_{i,t} = R_{i,t} - \hat{R}^{mco}_{i,t}$, de la estimación del modelo de mercado (6´). Un resumen de los resultados de los contrastes aplicados y su descripción puede verse en el **Anexo 1**. De forma genérica, podemos afirmar que existen suficientes evidencias muestrales como para aceptar la validez de tal propuesta. En particular, hemos aplicado alguno de los procedimientos de contraste más habituales para detectar perturbaciones con efectos *HCD*. El primero de los contrastes, por su grado de generalidad, es el test de significación individual nula de los coeficientes de bicorrelaciones de Hsieh (1989) de orden J, K = 1, ..., 10, $B(J, K) = E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-J} \cdot \varepsilon_{t-K})$, que equivale a contrastar la hipótesis nula de dependencia no lineal multiplicativa (*HCD*) frente a la alternativa de dependencia no lineal aditiva (bilinealidad, *MA* no lineal, ...). Como puede comprobarse en la **Tabla 2** de dicho anexo, para la gran mayoría de títulos el número de coeficientes significativos para una combinación dada de retardos (J, K) resulta ser inferior a 10 de los 100 considerados para cada serie, indicando bastante claramente la existencia de errores condicionalmente heterocedásticos. En segundo lugar (**Tabla 1** del anexo 1), se aplica el contraste no paramétrico basado en el principio de la Razón de Verosimilitudes de Gregory (1989) a partir de una cadena de Markov de orden $r = 1$ y $s = 2$ estados para detectar errores *ARCH*(1). Para el total de títulos considerados se rechaza la hipótesis nula de ausencia de efectos *ARCH* cuando se consideran dos estados de alta y baja volatilidad. Finalmente, aplicamos el test *LM* para detectar errores *ARCH*(p) de Engle (1982) considerando p = 1, ..., 10. Para la casi totalidad de series de rentabilidades consideradas se rechaza la hipótesis nula que establece nuevamente la ausencia de errores *ARCH* para cada uno de los retardos considerados. Los casos donde se acepta la hipótesis nula podrían deberse a la existencia de algunas observaciones anómalas o bien a que el mecanismo *HCD* es más general que el considerado puesto que dicho contraste no permite distinguir entre una alternativa *ARCH*(p) o *GARCH*(p,q). Así, en general, podemos concluir que existe evidencia muestral suficiente como para considerar que las series seleccionadas para el análisis empírico presentan heterocedasticidad condicional.

4. FORMACIÓN DE CARTERAS INGENUAS, RIESGO ESPECÍFICO Y *HCD*

Nuestro objetivo fundamental es derivar y estimar una medida apropiada de la diversificación de una cartera arbitraria asociada con el comportamiento dinámico de la variabilidad del término de perturbación del modelo de mercado que trata de explicar la rentabilidad de la misma. Es decir, sobre la base de un conjunto de $N > 0$ títulos seleccionados aleatoriamente, formamos carteras sucesivas de $n_i = n_{i-1} + 1$ títulos (i = 1, ..., N, $n_0 = 0$) y obtenemos el rendimiento diario de la misma de la forma

$\overline{R}_{n_i,t} = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i} R_{j,t}$. Si consideramos ahora que a nivel desagregado, el rendimiento del título j-ésimo de la muestra satisface la especificación dada por las ecuaciones (6´), (9) y (10), tenemos entonces que el rendimiento de la cartera n_i-ésima puede explicarse a partir de

$$\overline{R}_{n_i,t} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(\alpha_j + \beta_j R_{m,t} + \varepsilon_{j,t}) = \overline{\alpha}_{n_i} + \overline{\beta}_{n_i} R_{m,t} + \overline{\varepsilon}_{n_i,t} \quad \textbf{(11)}$$

donde realizamos dos supuestos distintos acerca del comportamiento del término de perturbación de ***(11)***. El primero consiste en considerar que la agregación contemporánea de n_i términos, cada uno de los cuales satisface un proceso $GARCH(p_i, q_i)$ dado por ***(9)*** y ***(10)***, resulta en un proceso, $\eta_{n_i,t}$, que satisface también un determinado esquema *HCD*. Es decir, proponemos en primer lugar emplear el siguiente modelo:

$$\overline{R}_{n_i,t} = \overline{\alpha}_{n_i} + \overline{\beta}_{n_i} R_{m,t} + \eta_{n_i,t} \quad (1 \le n_i \le N; t = 1,\ldots,T) \quad \textbf{(12.1)}$$

$$\eta_{n_i,t} = \xi_{n_i,t} \cdot \sqrt{\sigma^2_{n_i,t}} \qquad \xi_{n_i,t} \sim i.i.d.N(0, 1) \quad \textbf{(12.2)}$$

$$\sigma^2_{n_i,t} = \gamma_{n_i,0} + \sum_{u=1}^{p_{n_i}} \gamma_{n_i,u}\eta^2_{n_i,t-u} + \sum_{v=1}^{q_{n_i}} \vartheta_{n_i,v}\sigma^2_{n_i,t-v} \quad \textbf{(12.3)}$$

donde los ordenes (p_{ni}, q_{ni}) y los coeficientes de la ecuación para la varianza condicional ***(12.3)*** vendrán determinados implícitamente por las características distribucionales de los microtérminos agregados[2]. Además, tenemos que a partir de ***(12.3)***, la varianza incondicional (indicador del riesgo específico de la cartera n_i-ésima) vendría dada por

$$\sigma^2_{n_i,0} = E(\sigma^2_{n_i,t}) = \gamma_{n_i,0}\left(1 - \sum_{u=1}^{max(p_{n_i},q_{n_i})} \delta_{n_i,u}\right)^{-1} \quad \textbf{(13)}$$

En el **Anexo 2** proponemos un intento de determinar unas cotas bilaterales para la magnitud de esta varianza relacionada con los parámetros de ***(12.3)*** y la “verdadera” varianza incondicional del término de perturbación en ***(11)***.

2. Un tratamiento analítico detallado del problema de la agregación contemporánea de proceso *GARCH* puede consultarse en Nijman, T. y E. Sentana (1996) y en Zaffaroni, P. (2000).

Frente a esta modelización proponemos obtener una medida generalizada del riesgo específico de la cartera que tenga en cuenta las características particulares de los procesos generadores de las perturbaciones en ***(11)***. Para ello generalizamos en primer lugar el supuesto dado en ***(3)***, permitiendo la existencia de covariaciones condicionales contemporáneas entre tales términos

$$E_{t-1}(\varepsilon_{j,t}\cdot\varepsilon_{k,t-r}) = h_{jk,t} \quad \text{para todo } j,\ k = 1, ..., n_i \quad r = 0 \qquad \textbf{(14)}$$
$$= 0 \quad \text{para todo } j,\ k = 1, ..., n_i,\ r > 0$$

de forma que para una cartera formada por n_i títulos, construímos el vector aleatorio $\boldsymbol{E}_{ni,t} = (\varepsilon_{1,t}, ..., \varepsilon_{ni,t})' \in M_{ni'1}$ ($t = 1, ..., T$) de forma que

$$E_{t-1}(\boldsymbol{E}_{n_i,t}\boldsymbol{E}'_{n_i,t}) = H_{ni,t} = (h_{jk,t})_{j,k=1,...,ni} \in M_{ni'ni} \qquad \textbf{(15)}$$

es la matriz que recoge las $n_i(n_i+1)/2$ varianzas y covarianzas condicionales variables que permiten obtener de forma simple la varianza incondicional de la perturbación $\bar{\varepsilon}_{n_i,t}$ en ***(11)***, como

$$V_{n_i,0} = Var(\bar{\varepsilon}_{n_i,t}) = \frac{1}{n_i^2}\sum_{j,k=1}^{n_i} E(h_{jk,t}) = \frac{1}{n_i^2}\boldsymbol{i}'_{n_i}E(\boldsymbol{H}_{n_i,t})\boldsymbol{i}_{n_i} = \frac{1}{n_i^2}\boldsymbol{i}'_{n_i}\boldsymbol{H}_{n_i,0}\boldsymbol{i}_{n_i} \qquad \textbf{(16)}$$

donde $\boldsymbol{i}_{ni}$ es un vector columna $n_i \times 1$ de unos. Dada la normalidad condicional, la estimación *máximo verosímil* no plantearía demasiados problemas de no ser por el hecho del elevado número de parámetros a estimar de los que depende la matriz $\boldsymbol{H}_{ni,t}$. Para un estudio de distintas parametrizaciones *(G)ARCH Multivariantes* pueden consultarse, entre otros, Bollerslev, *et al.* (1988), Bollerslev (1990), Gourieroux (1992), Engle y Kroner (1993) y Hansson y Hördahl (1998). Sin embargo, aún cuando se han propuesto diversas alternativas para la representación de $\boldsymbol{H}_{ni,t}$, éstas adolecen de falta de parsimonia, lo que complica la obtención de "buenas" estimaciones cuando la dimensión (n_i) es relativamente alta. Dado que en nuestro caso, el número de títulos disponibles es elevado, hemos considerado como posibles dos recientes alternativas, el modelo *GARCH* Multivariante de Correlaciones Condicionales Dinámicas (*DCCGARCH*) de Engle (2000) y el modelo *GARCH* Multivariante Ortogonal (*OGARCH*) de Alexander (2000), que no requieren más que la estimación de modelos *GARCH* univariantes para obtener una estimación de dicha matriz de covarianzas condicionales y, por tanto, de ***(16)***.

Bajos los supuestos dados en ***(9)*** y ***(14)***, Engle (2000) propone descomponer la matriz $\boldsymbol{H}_{ni,t}$ de la forma

$$\boldsymbol{H}_{n_i,t} = \boldsymbol{D}_{n_i,t}\boldsymbol{C}_{n_i,t}\boldsymbol{D}_{n_i,t} \qquad \textbf{(17)}$$

donde $\boldsymbol{D}_{n_i,t} = diag\{\sqrt{h_{j,t}}\}_{j=1,\dots,n_i}$ y $\boldsymbol{C}_{n_i,t} = \{\rho_{jk,t}\}_{j,k=1,\dots,n_i}$, puesto que el coeficiente de correlación condicional contemporánea entre las perturbaciones *j* y *k*-ésima, viene dado por

$$\rho_{jk,t} = Corr_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j,t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}) = (h_{j,t} \cdot h_{k,t})^{-1/2} E_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j,t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t}) = E_{t-1}(Z_{j,t} \cdot Z_{k,t}) \qquad \textbf{(18)}$$

Bajo la descomposición dada en ***(17)*** y el supuesto de normalidad condicional, la función de log-verosimilitud del proceso n_i-dimensional $\boldsymbol{E}_{ni,T}=(\boldsymbol{E}_{ni,t})_{t=1,\dots,T}$ viene dada aproximadamente por

$$L_T \propto -\sum_{t=1}^{T} ln\,|\,\boldsymbol{D}_{n_i,t}\,| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(ln\,|\,\boldsymbol{C}_{n_i,t}\,| + \boldsymbol{Z}'_{n_i,t}\boldsymbol{C}^{-1}_{n_i,t}\boldsymbol{Z}_{n_i,t}\right)$$

de forma que propone implementar un procedimiento de estimación en dos etapas. En la primera etapa se propone estimar los parámetros de $\boldsymbol{D}_{n_i,t}$ y obtener las perturbaciones *GARCH* estandarizadas, $Z_{j,t}$ y, a partir de estas estimar los parámetros relevantes de $\boldsymbol{C}_{n_i,t}$ a partir de la verosimilitud. Para ello basta únicamente con postular un esquema explicativo de las funciones de correlación condicional $\rho_{jk,t}$. Un esquema plausible para tales funciones es una generalización del modelo *GARCH*, de la forma

$$\rho_{jk,t} = \omega_{jk,0} + \sum_{u=1}^{p_{jk}} \omega_{jk,u}\left(Z_{j,t-u} Z_{k,t-u}\right) + \sum_{v=1}^{q_{jk}} \theta_{jk,v}\, \rho_{jk,t-v} \qquad \textbf{(19)}$$

Así, si $\boldsymbol{D}_{n_i,t}$ se estima consistentemente en la primera etapa, la estimación de los parámetros en $\boldsymbol{C}_{n_i,t}$ será consistente, aunque posiblemente se producirá una perdida de eficiencia relativa, incluso asintóticamente, en relación con la estimación conjunta de todos los parámetros relevantes en L_T.

Alexander (2000) propone el denominado modelo *GARCH* Ortogonal (*OGARCH*) que consiste simplemente en construir combinaciones lineales incondicionalmente incorrelacionadas de las series originales aplicando el método de los componentes principales, y así construir la matriz de covarianzas condicionales mediante la estimación de modelos *GARCH* univariantes a partir de tales combinales. De forma más particular, sean $\boldsymbol{\varepsilon}_{T,j} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{j,1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j,T})' \in M_{T\times 1}$ $(j = 1, \dots, n_i)$ e $\boldsymbol{Y}_{T,ni} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{T,1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{T,ni}) \in M_{T\times ni}$, donde $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{T,j}) = \boldsymbol{\varepsilon}_j$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{T,j}\boldsymbol{\varepsilon}'_{T,j}) = \Sigma_j = (S_{ts,j})_{t,s=1,\dots,T}$ con $S_{tt,j} = S_j^2$ y $\boldsymbol{X}_{T,ni}$ la matriz formada por los n_i vectores aleatorios $\boldsymbol{\xi}_{T,j} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{T,j} - \boldsymbol{\varepsilon}_j)/S_j$, de forma que bajo el supuesto de estacionariedad débil, $E(\boldsymbol{\xi}_{T,j}) = \mathbf{0}_j$ y $E(\boldsymbol{\xi}_{T,j}\boldsymbol{\xi}'_{T,j}) = \Omega_j = (\varpi_{ts,j})_{t,s=1,...,T}$, $\varpi_{tt,j} = 1$.

Sea entonces $\boldsymbol{W}_{ni,ni}$ la matriz de autovectores $\boldsymbol{w}_{ni,j}$ ($j = 1, ..., n_i$) de la matriz cuadrada

$$\frac{1}{T}\left(\boldsymbol{X}'_{T,ni}\boldsymbol{X}_{T,ni}\right) = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}\xi_{t,j}\xi_{t,k}\right)_{j,k=1,...,n_i} \in M_{n_i \times n_i}$$

de forma que $T^{-1}\left(\boldsymbol{X}'_{T,ni}\boldsymbol{X}_{T,ni}\right)\boldsymbol{W}_{ni,ni} = \boldsymbol{W}_{ni,ni}\boldsymbol{\Lambda}_{ni,ni}$, donde $\boldsymbol{\Lambda}_{ni,ni}$ es la matriz diagonal de autovalores de $T^{-1}\left(\boldsymbol{X}'_{T,ni}\boldsymbol{X}_{T,ni}\right)$, $\boldsymbol{\Lambda}_{ni,ni} = diag\{\lambda_j\}_{j=1,...,ni}$. Se tiene así que el vector columna j-ésimo de la matriz $\boldsymbol{W}_{ni,ni}$ ($\boldsymbol{w}_{ni,j}$) se corresponde con el j-ésimo autovalor. Si se reordenan entonces los autovalores de mayor a menor valor, es decir, se define la matriz diagonal $\equiv_{(ni,ni)} = diag\{\lambda_{(j)}\}_{j=1,...,ni}$ donde $\lambda_{(j)} > \lambda_{(j+1)}$ ($j = 1, ..., n_i$-1) y, correspondientemente, se puede definir la matriz de autovectores ordenados $\boldsymbol{W}_{(ni,ni)} = (\boldsymbol{w}_{ni(j)})_{j=1,...,ni}$, de forma que el autovector j-ésimo de la matriz ordenada de autovectores se corresponde con el j-ésimo autovalor de $\boldsymbol{\Lambda}_{(ni,ni)}$.

Así, estos autovectores ordenados permiten definir el j-ésimo componente principal del sistema como

$$p_{(j)} = \sum_{k=1}^{n_i} w_{k,(j)}\boldsymbol{\xi}_{T,j} \in M_{T\times 1} \quad (j = 1, ..., n_i) \tag{20}$$

donde $w_{k,(j)}$ es el elemento k-ésimo del j-ésimo autovector ordenado, o bien, en notación matricial, $\boldsymbol{p}_{(j)} = \boldsymbol{X}_{T,ni}\cdot\boldsymbol{w}_{ni(j)}$. Así, cada componente principal es una serie temporal de combinaciones lineales de las variables en $\boldsymbol{X}_{T,ni}$. Si éstos se disponen como las columnas de una matriz $\boldsymbol{P}_{T(ni)}$ de componentes principales, se tiene que $\boldsymbol{P}_{T(ni)} = \boldsymbol{X}_{T,ni}\cdot\boldsymbol{W}_{(ni,ni)}$, donde puede comprobarse que este procedimiento produce componentes incorrelacionadas (ortogonales) dado que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}'_{T(n_i)}\boldsymbol{P}_{T(n_i)} &= \boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)}\left(\boldsymbol{X}'_{T,n_i}\boldsymbol{X}_{T,n_i}\right)\boldsymbol{W}_{(n_i,n_i)} = T\cdot\boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{W}_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{\Lambda}_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{W}_{(n_i,n_i)}\\ &= T\cdot\boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{W}_{(n_i,n_i)}\boldsymbol{\Lambda}_{(n_i,n_i)} = T\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{(n_i,n_i)}\end{aligned}$$

que es una matriz diagonal, de forma que las columnas de $\boldsymbol{P}_{T(ni)}$ están incorrelacionada. Además, puesto que $\boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)} = \boldsymbol{W}^{-1}_{(n_i,n_i)}$ tenemos que

$$X_{T,ni} = P_{T(ni)}\cdot\ \boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)} = \sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{p}_{(j)}\boldsymbol{w}'_{n_i(j)} \tag{21}$$

de forma que $\xi_{T,j} = \sum_{k=1}^{n_i} \boldsymbol{p}_{(k)} w_{k(j)} = \boldsymbol{P}_{T(ni)} \cdot \boldsymbol{w}_{ni(j)}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_{T,j} = \boldsymbol{\varepsilon}_j + S_j \cdot \xi_{T,j} = \boldsymbol{\varepsilon}_j + S_j \cdot \boldsymbol{P}_{T(ni)} \cdot \boldsymbol{w}_{ni(j)} = \boldsymbol{\varepsilon}_j$ $+ \boldsymbol{P}_{T(ni)} \cdot \boldsymbol{w}^*_{n_i(j)}$. Así, cada vector de datos estandarizado, $\xi_{T,j}$, es una combinación lineal de las n_i componentes principales del sistema. La proporción de la variación total el $\boldsymbol{X}_{T,ni}$ explicada por el j-ésimo componente principal es $\lambda_{(j)}/\sum_{k=1,ni}\lambda_{(k)}$. Sea $\boldsymbol{S}_{ni,ni}$ $= diag\{S_j\}_{j=1,\dots,ni}$. A partir del análisis anterior, se tiene entonces una representación alternativa para $\boldsymbol{Y}_{T,ni}$ dada por

$$\boldsymbol{Y}_{T,ni} = \boldsymbol{Y}_{ni,ni} + \boldsymbol{X}_{T,ni} \boldsymbol{S}_{ni,ni} = \boldsymbol{Y}_{ni,ni} + \boldsymbol{P}_{T(ni)} \cdot \boldsymbol{W}'_{(n_i,n_i)} \boldsymbol{S}_{ni,ni} = \boldsymbol{Y}_{ni,ni} + \boldsymbol{P}_{T(ni)} \cdot \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}$$

de forma que $E(\boldsymbol{Y}_{t,ni}) = \boldsymbol{Y}_{ni}$ y $\boldsymbol{V}_{ni,t} = Var_{t-1}[\boldsymbol{Y}_{t,ni}] = \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}\ E_{t-1}(\boldsymbol{P}'_{t(n_i)}\ \boldsymbol{P}_{t(n_i)})\ \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}$,

$$V_{ni,t} = \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}\ \boldsymbol{D}_{t(n_i)}\ \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)} \qquad \textbf{(22)}$$

donde $\boldsymbol{D}_{t(n_i)} = E_{t-1}(\boldsymbol{P}'_{t(n_i)}\ \boldsymbol{P}_{t(n_i)})$ es la matriz diagonal de varianzas condicionales, $h_{(j),t}$ (j = 1, ..., n_i) del j-ésimo componente principal. Así, tenemos que

$$V_{ni,0} = E(V_{ni,t}) = \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}\ E(\boldsymbol{D}_{t(n_i)})\ \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)} = \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)}\ \boldsymbol{D}_{0(n_i)}\ \boldsymbol{W}'^*_{(n_i,n_i)} \qquad \textbf{(23)}$$

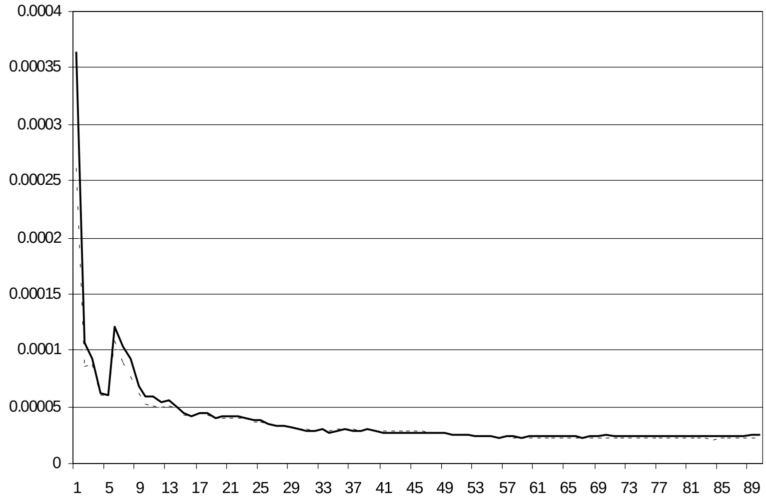
5. APLICACIÓN

Para implementar los procedimientos de estimación propuestos del riesgo específico asociado a una cartera ingenua en presencia de perturbaciones condicionalmente heterocedásticas en el modelo de mercado, disponemos de dos conjuntos de títulos de tamaño N_c (c=1, 2) títulos (90 y 35 respectivamente) seleccionados aleatoriamente para el mercado bursátil español durante el período 2.01.95 a 31.05.00, con un total de 1357 observaciones para el rendimiento diario del título j-ésimo, calculado como $R_{j,t} = (P_{j,t} - P_{j,t-1})/P_{j,t-1}$, así como para la proxy que hemos elegido para la cartera representativa de la evolución del mercado, $R_{m,t}$ (IGBM). Dado que la validez de los resultados asociados a cada procedimiento propuesto depende básicamente de la correcta especificación de la ecuación para la varianza condicional y como hemos indicado anteriormente (y puede verse en el **Anexo 1**) no es posible contrastar directamente la hipótesis de efectos $GARCH(p, q)$ en dicha ecuación, hemos aplicado una modificación del contraste que propone Bollerslev (1986) para contrastar la hipótesis nula de perturbaciones condicionalmente $ARCH(p)$ frente a la alternativa de efectos $GARCH(r, q)$ donde $r > 0$ y $p \geq q$, justificando la utilización de dicha modelización.

Así, en el **Anexo 3** derivamos analíticamente una expresión que recoge el efecto de un error de especificación de este tipo sobre la magnitud del riesgo específico estimado y presentamos los resultados de dicho contraste para la hipótesis *ARCH*(p) frente a la alternativa *GARCH*(r, 1) ($r > 0$).

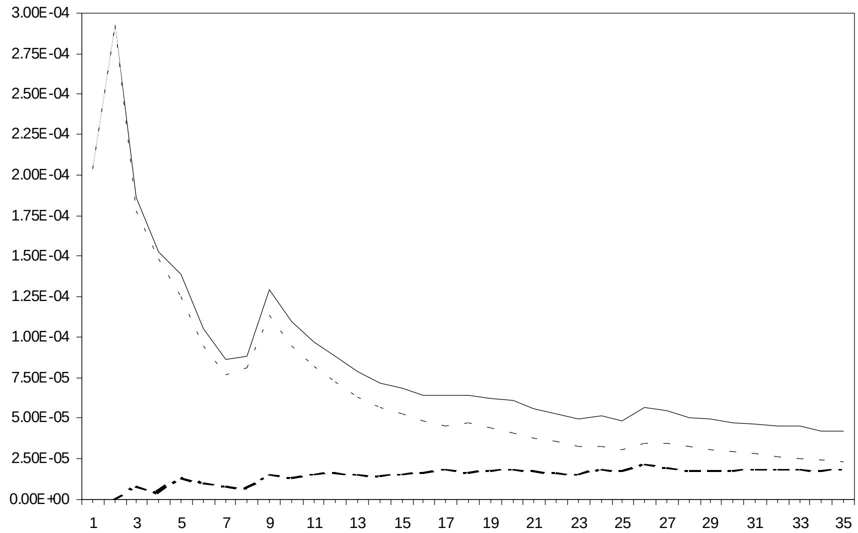
El procedimiento empleado ha sido utilizar los primeros 90 títulos para estimar el riesgo específico a partir de las ecuaciones ***(12.1)-(12.3)*** y ***(13)*** ajustando un proceso *GARCH*(1,1) a las perturbaciones del modelo de mercado con datos agregados (versión univariante) y los 35 títulos restantes para implementar la metodología propuesta basada en los modelos *GARCH* multivariantes *DCCGARCH*, ecuaciones ***(12.1)-(12.3)***, ***(16)*** y ***(17)*** y *OGARCH*, ecuaciones ***(6´)***, ***(16)*** y ***(23)*** (versión multivariante). De forma más particular, en este último caso hemos seguido el siguiente procedimiento para estimar el riesgo específico de la cartera n_i-ésima. Sea $\boldsymbol{V}_{N,0}(m) \in M_{N'N}$, $m = 1, 2$, la matriz de varianzas-covarianzas incondicionales calculadas para los N títulos de la cartera final, donde $m = 1$ hace referencia a que ésta se ha calculado empleando la especificación *DCCGARCH* Multivariante de Engle (2000), mientras que $m = 2$ se ha evaluado a partir del modelo *OGARCH* multivariante de Alexander (2000). Tenemos entonces que la varianza incondicional del término de perturbación en el modelo de mercado ajustado al rendimiento de la cartera formada por los primeros $n_i \leq N$ títulos de la muestra puede calcularse como $\boldsymbol{V}_{n_i,0}(m) = n_i^{-2}(\boldsymbol{i}_N'^{(n_i)} \cdot \boldsymbol{V}_{N,0}(m) \cdot \boldsymbol{i}_N^{(n_i)})$, donde $\boldsymbol{i}_N^{(n_i)} = (1, 1, ..., 1, 0, ..., 0)' \in M_{N\times 1}$ es un vector columna de unos hasta la posición n_i-ésima y ceros en el resto de posiciones. Alternativamente, podría calcularse una versión restringida de esta varianza generalizada, es decir, sin tener en cuenta las correlaciones contemporáneas incondicionales, incluyendo únicamente los elementos diagonales de la matriz $\boldsymbol{V}_{N,0}(m)$. Así, tendríamos que $\boldsymbol{V}^*_{n_i,0}(m) = n_i^{-2} \sum_{j=1,n_i} \left(\boldsymbol{i}_N'^{(j)} \cdot \boldsymbol{V}_{N,0}(m) \cdot \boldsymbol{i}_N^{(j)}\right)$, donde $\boldsymbol{i}_N^{(j)} = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)' \in M_{N\times 1}$ es un vector columna de ceros, salvo el que ocupa la posición j-ésima que es igual a uno. Los resultados cada una de estas estrategias se recoge de forma resumida en los gráficos 3-5, donde se representa el perfil del riesgo específico estimado.

Gráfico 3. Perfil del Riesgo Específico. Caso Univariante* GARCH*(1,1)



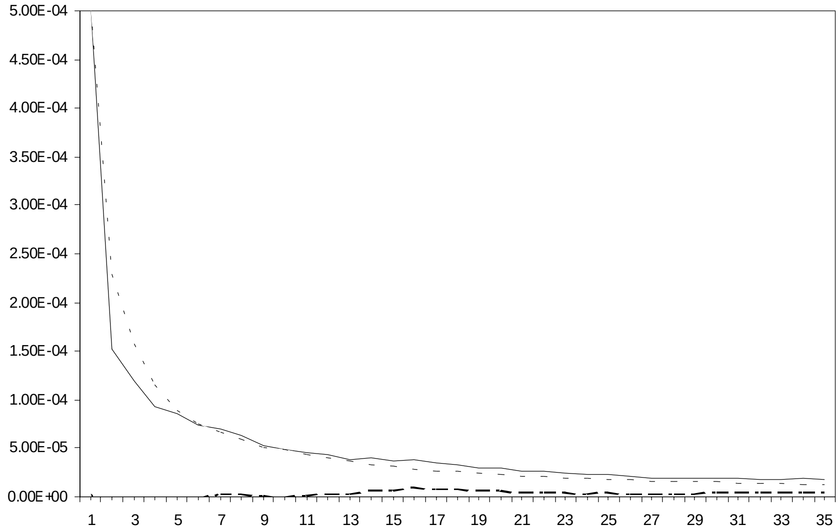
$\hat{\sigma}^2_{n_i,0} = \hat{\gamma}_{n_i,0}\left(1 - \left[\hat{\gamma}_{n_i,1} + \hat{\vartheta}_{n_i,1}\right]\right)^{-1}$ $S^2_{n_i,T} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\eta}^2_{n_i,t}$

Gráfico 4. Perfil del Riesgo Específico
***Caso Multivariante.* Modelo DCCGARCH(1, 1)**



$V_{n_i,0}(m)$ — — — $V^*_{n_i,0}(m)$ . . . . ($V_{n_i,0}(m)$ - $V^*_{n_i,0}(m)$) (m = 1)

Gráfico 5. Perfil del Riesgo Específico
***Caso Multivariante.* Modelo OGARCH(1, 1)**



——— $V_{n_i,0}(m)$ — — — $V^{*}_{n_i,0}(m)$ . . . ($V_{n_i,0}(m)$ - $V^{*}_{n_i,0}(m)$) (m = 1)

6. CONCLUSIONES

La principal conclusión de este trabajo puede sintetizarse en el hecho de que, a partir de la propuesta univariante *GARCH*(1, 1), es posible observar que la consideración de esta extensión del modelo de mercado produce los efectos esperados sobre el grado de diversificación de una cartera ingenua medida por la varianza incondicional de dicho proceso. Por otro lado, la inclusión de la magnitud de la correlación contemporánea entre los títulos de la cartera ingenua en el cálculo de una medida representativa del grado de diversificación de la misma genera un perfil para el riesgo sistemático decreciente en función del número de títulos considerado. Sin embargo, este perfil es distinto según el método de factorización de la matriz de covarianzas condicionales, $\boldsymbol{H}_{ni,t}$, y del método de estimación de los parámetros que la caracterizan. En el caso del modelo multivariante *DCCGARCH*, el nivel "asintótico" de la diversificación ($5 \cdot 10^{-5}$) es aproximadamente el doble del nivel que se alcanza con el modelo *OGARCH*, tanto si se incluyen o no los elementos fuera de la diagonal de la matriz de covarianzas incondicionales.

ANEXO 1. CONTRASTES DE *HCD* SOBRE LOS RESIDUOS *MCO* DE LA ESTIMACIÓN DEL MODELO DE MERCADO *(6´)*

El primer contraste que hemos aplicado es la versión de regresión del contraste *LM* para $ARCH(p \geq 1)$ de Engle (1982), basado en una autorregresión de orden p de los residuos *MCO* cuadráticos[3]. El estadístico, $\xi_{LM}(p)$, se construye como $T\cdot R_p^2$ y bajo la hipótesis nula de homocedasticidad condicional se distribuye como $\chi^2(p)$. El segundo contraste es una versión no paramétrica de este contraste desarrollada por Gregory (1989), basada en una reformulación del proceso generador de los residuos cuadráticos como una cadena de Markov de orden r y número de estados s, aplicando el principio de contrastación de la razón de verosimilitudes aproximada. El estadístico de contraste para el caso de una cadena de Markov de primer orden con dos estados ($s = 2$) se distribuye como $\chi^2(1)$ bajo la hipótesis nula de independencia entre $(e_{i,t}^2, e_{i,t-k}^2)$.

El tercer procedimiento de contraste es el contraste de significación individual del coeficiente de bicorrelación de orden ($J, K > 0$), basado en la función de bicovarianzas de Hsieh (1989), $B_i(J, K) = E(\varepsilon_{i,t}\cdot\varepsilon_{i,t-J}\cdot\varepsilon_{i,t-K})$ ($J, K > 0$), que postula como hipótesis nula la *dependencia no lineal multiplicativa* (*HCD*), frente a la alternativa de *dependencia no lineal aditiva* (*bilinealidad*, *MANL*, ...). Los resultados sintéticos de estos contrastes se reflejan en las siguientes tablas.

Tabla 1. Número de Veces que se Rechaza la Hipótesis Nula (Homocedasticidad Condicional) (Sign. 5%)

Test LM-*ARCH*(*p*)		
	$N_1 = 90$	$N_2 = 35$
$p = 1$	84	31
$p = 2$	83	31
$p = 3$	83	31
$p = 4$	83	31
$p = 5$	84	32
$p = 6$	84	32
$p = 7$	84	32
$p = 8$	84	32
$p = 9$	82	31
$p = 10$	81	31

Test RV-*ARCH*(1) (CM)		
(r, s)	$N_1 = 90$	$N_2 = 35$
(1, 2)	90	35
Test basado en una cadena de Markov (*CM*) de primer orden ($r = 1$) con dos estados ($s = 2$): *L*: low volatility *H*: high volatility		

3. Como puede verse en Bollerslev (1986), no es posible derivar un contraste directo de la hipótesis nula de homocedasticidad condicional frente a la alternativa de *HCD* explicada por un proceso *GARCH*(p, q). El contraste *LM* para efectos *ARCH*(p) es idéntico al que resulta para contrastar frente a *GARCH*(p, q).

Tabla 2. Porcentajes de Coeficientes de Bicorrelación Significativos (J,K = 1, ..., 10) (Sign. Contraste Unilateral 5%)

$H_i(J, K)$ $(i = 1, ..., N_1 = 90)$									
1	12%	21	11%	41	2%	61	6%	81	10%
2	20%	22	6%	42	7%	62	4%	82	6%
3	10%	23	8%	43	6%	63	5%	83	8%
4	11%	24	4%	44	6%	64	11%	84	8%
5	5%	25	17%	45	8%	65	12%	85	8%
6	16%	26	10%	46	6%	66	10%	86	17%
7	10%	27	11%	47	14%	67	6%	87	4%
8	11%	28	3%	48	11%	68	14%	88	14%
9	12%	29	12%	49	4%	69	18%	89	4%
10	6%	30	10%	50	13%	70	4%	90	12%
11	6%	31	8%	51	5%	71	12%		
12	11%	32	10%	52	0%	72	8%		
13	6%	33	9%	53	7%	73	6%		
14	9%	34	5%	54	10%	74	5%		
15	6%	35	10%	55	6%	75	14%		
16	8%	36	11%	56	6%	76	4%		
17	8%	37	10%	57	12%	77	8%		
18	8%	38	6%	58	8%	78	5%		
19	10%	39	8%	59	7%	79	10%		
20	6%	40	10%	60	18%	80	15%		

$H_i(J, K)$ $(i = 1, ..., N_2 = 35)$							
1	6%	11	6%	21	10%	31	10%
2	11%	12	18%	22	8%	32	10%
3	14%	13	8%	23	11%	33	7%
4	12%	14	10%	24	10%	34	8%
5	9%	15	11%	25	6%	35	6%
6	13%	16	6%	26	10%		
7	12%	17	8%	27	6%		
8	6%	18	11%	28	7%		
9	0%	19	5%	29	11%		
10	4%	20	6%	30	10%		

ANEXO 2. AGREGACIÓN CONTEMPORÁNEA DE PROCESOS *GARCH* DERIVACIÓN DE COTAS MÍNIMAS Y MÁXIMAS PARA LA VARIANZA INCONDICIONAL DEL PROCESO *GARCH*-AGREGADO

A partir de la ecuación básica ***(12.2)***, que describe el proceso generador de la perturbación $\eta_{n_i,t}$ condicionalmente heterocedástica, tenemos que $\eta^2_{n_i,t} = \sigma^2_{n_i,t} + (\xi^2_{n_i,t} - 1)\ \sigma^2_{n_i,t} = \sigma^2_{n_i,t} + Q_{n_i,t}$, donde $Q_{n_i,t}$ es un proceso de media nula, incorrelacionado y condicionalmente heterocedástico (Bollerslev (1986)). Tenemos así que la ecuación ***(12.3)*** puede reescribirse como

$$\sigma^2_{n_i,t} = \gamma_{n_i,0} + \sum_{u=1}^{max(p_{n_i},q_{n_i})} \delta_{n_i,u}\eta^2_{n_i,t-u} - \sum_{v=1}^{q_{n_i}} \vartheta_{n_i,v} Q_{n_i,t-v}$$

de forma que $E(\sigma^2_{n_i,t}) = \gamma_{n_i,0} + \sum_{u=1}^{max(p_{n_i},q_{n_i})} \delta_{n_i,u} E(\eta^2_{n_i,t-u})$, donde:

$$E(\eta^2_{n_i,t-u}) = E(E_{t-1}(\bar{\varepsilon}^2_{n_i,t-u})) = V_{n_i,0} = n_i^{-2} \sum_{j,k=1}^{n_i} h_{jk,0} \quad h_{jk,0} = E(h_{jk,t}) \quad h_{jk,t} = E_{t-1}(\varepsilon_{j,t-u}\varepsilon_{k,t-u})$$

Tenemos así que

$$\sigma^2_{n_i,0} = \gamma_{n_i,0} + V_{n_i,0} \sum_{u=1}^{max(p_{n_i},q_{n_i})} \delta_{n_i,u} \; (\sigma^2_{n_i,0} - V_{n_i,0}) = \gamma_{n_i,0} + V_{n_i,0} \left\{ \sum_{u=1}^{max(p_{n_i},q_{n_i})} \delta_{n_i,u} - 1 \right\}$$

donde si el proceso $GARCH(p_{ni}, q_{ni})$ especificado determina la estacionariedad débil de $\eta_{n_i,t}$, entonces la varianza incondicional, $\sigma^2_{n_i,0}$, determinada por la ecuación ***(13)*** estará acotada por $\gamma_{n_i,0} < \sigma^2_{n_i,0} < (\gamma_{n_i,0} + V_{n_i,0})$, donde $\gamma_{n_i,0} > 0$ puede ser arbitrariamente pequeño y es de esperar que la magnitud de $V_{n_i,0}$ también decrezca por el efecto de la agregación, por lo que la aproximación puede ser relativamente buena.

ANEXO 3. CONSECUENCIAS DE UN ERROR DE ESPECIFICACIÓN DEL ESQUEMA *HCD* SOBRE EL RIESGO ESPECÍFICO

Consideremos el caso de que la "verdadera" ecuación de varianza condicional que caracteriza el comportamiento de un proceso débilmente estacionario, ε_t, es $GARCH(1, 1)$, es decir, $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = h_{0,t} = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon^2_{t-1} + \theta_1 h_{0,t-1}$, de forma que $Var(\varepsilon_t) = E[Var_{t-1}(\varepsilon_t)] = \sigma^2_0 = \omega_0(1 - [\omega_1 + \theta_1])^{-1} = \omega_0(1 - \delta_1)^{-1}$. Sin embargo, se especifica incorrectamente un modelo $ARCH(p)$ a dicha serie, es decir, $h_t = \gamma_0 + \sum_{u=1,p} \gamma_u \varepsilon^2_{t-u} = \gamma_0 + \Gamma_p(L) \varepsilon^2_t$, de forma que consideraríamos que la varianza incondicional de ε_t viene dada por $E(h_t) = \gamma_0(1 - \Gamma_p(1))^{-1}$. Sin embargo, puede demostrarse simplemente que la verdadera varianza incondicional que determina el ajuste incorrecto del modelo $ARCH(p)$ viene dada por $E_0(h_t) = \gamma_0 + \Gamma_p(1)$, de forma que el error cometido en este último caso viene dado por

$$E_0(h_t) - E(h_t) = \Gamma_p(1)[\, \sigma^2_0 - E(h_t)] < \; \sigma^2_0 - E(h_t)$$

es decir, que el error cometido al tomar como medida del riesgo específico $E(h_t)$ en lugar de la verdadera varianza incondicional generada por el proceso $ARCH(p)$ es menor que el error cometido cuando se compara esta primera con la "verdadera" varianza incondicional del término ε_t. Para justificar la utilización del esquema de *HCD GARCH*(1, 1) en las versiones univariante y multivariante del procedimiento propuesto hemos aplicado una modificación del contraste *LM* propuesto inicialmente por Bollerslev (1986)[4], con los siguientes resultados.

Tabla 3. Número de veces que se rechaza la hipótesis nula(a) ARCH(p=1,..., 5) frente a la alternativa GARCH(r,1)(r=1,...,5)

$$\bar{R}_{n_i,t} = \bar{\alpha}_{n_i} + \bar{\beta}_{n_i} R_{m,t} + \eta_{n_i,t} \quad (1 \le n_i \le N_1) \qquad Var_{t-1}(\eta_{n_i,t}) = \gamma_{n_i,0} + \sum_{u=1}^{p} \gamma_{n_i,u} \eta^2_{n_i,t-u}$$

	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	
p = 1	90	90	90	90	90	(b)
p = 2	77	82	90	90	90	(c)
p = 3	31	50	72	88	88	"
p = 4	13	52	58	67	89	"
p = 5	12	16	19	20	22	"

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1 \le i \le N_2) \qquad Var_{t-1}(\varepsilon_{i,t}) = h_{i,t} = \omega_{i,0} + \sum_{u=1}^{p} \omega_{i,u} \varepsilon^2_{i,t-u}$$

	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	
p = 1	31	35	35	35	35	(b)
p = 2	20	25	34	34	34	(c)
p = 3	10	15	22	35	35	"
p = 4	5	8	10	22	34	"
p = 5	5	7	8	15	17	"

NOTAS: [(a)] *Los números en las tablas indican el número de veces que se rechaza la hipótesis nula considerada al 5% de significación,* [(b)] *Contraste ARCH(p) vs. GARCH(r,p)=ARCH(r+p) (p=1),* [(c)] *Contraste ARCH(p) vs. GARCH(r,1) (p=2,...,5;r=1,...,5)*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, C. (2000).- *A Primer on the Orthogonal GARCH Model*, Manuscript ISMA Centre, University of Reading, UK.

BERA. A.K. y S. LEE (1993).- *Information Matrix Test, Parameter Heterogeneity and ARCH: A Synthesis*, Review of Economic Studies. Vol. 60, pp.229-240.

BERA, A.K. y M. L. HIGGINS (1995).- *On ARCH Models: Properties, Estimation and Testing*, en Oxley, L., George, D.A.R. George, C.J. Roberts y S. Sayer (eds.) *Surveys in Econometrics*. Capítulo 8 (pp.215-272). Basil Blackwell, Ltd.

4 La justificación más detallada y el planteamiento del procedimiento de contraste indicado puede solicitarse a los autores o consultarse en Afonso Rodríguez, J., N. Bruno P. y J. Giner (2000).- *Una Modificación del Contraste LM en el contraste ARCH(p) versus GARCH(r,q)*, Manuscrito sin publicar.

BOLLERSLEV, T. (1986).- *A Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics. Vol. 31, pp.307-327.

BOLLERSLEV, T. (1990).- *Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach*, Review of Economics and Statistics. Vol. 72, pp.498-505.

BOLLERSLEV, T., R.F. ENGLE y J.M. WOOLDRIDGE (1988).- *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances*, Journal of Political Economy. Vol.96, pp.116-131.

BOLLERSLEV, T., R.Y. CHOU y K.F. KRONER (1992).- *ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics. Vol. 52, pp.5-59.

BROWN, R.L., J. DURBIN y J.M. EVANS (1975).- *Techniques for testing the constancy of regression relationships over time*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol.37, pp.149-192."

DIEBOLD, F.X. y J.A. LÓPEZ (1995).- *Modeling Volatility Dynamics*, Technical Working Paper No. 173. NBER.

ENGLE, R.F. (1982).- *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*, Econometrica. Vol. 50, pp.987-1008.

ENGLE, R.F. (2000).- *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, Discussion Paper 00-09. Department of Economics, University of California, San Diego.

ENGLE, R.F. y K.F. KRONER (1993).- *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Discussion Paper 89-57R. Department of Economics, University of California, San Diego.

EVANS, J. L. (1968).- Diversification and the Reduction of Dispersión: An Empirical Analysis*, Tesis Doctoral, Graduate School of Busines Administration, University of Washington, Seattle.*

GLOSTEN, L.R., R. JAGANNATHAN y D. RUNKLE (1993).- *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return of Stocks*, Journal of Finance. Vol.48(5), pp.1779-1801.

GÓMEZ-BEZARES, F.G., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑES (1994).- Valoración de Acciones en la Bolsa Española*, Biblioteca de Gestión Desclee de Brouwer, Bilbao.*

GÓMEZ-BEZARES, F.G., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑES; (1999).- Riesgo y Rentabilidad en Mercados de Tamaño Intermedio (el caso español)*, Análisis Financiero, 78, segundo cuatrimestre, pp. 52-74.*

GOURIEROUX, C. (1992).- *Modeles ARCH et Applications Financieres*, Economica, Paris.

GREGORY, W.A. (1989).- *A Nonparametric Tets for Autoregressive Conditional Heteroscedasticity: A Markov-Chain Approach*, Journal of Business and Economic Statistics. Vol. 7(1), pp.107-115.

HANSSON, B. y P. HÖRDAHL (1998).- *Testing the Conditional CAPM using Multivariate GARCH-*

M, Applied Financial Economics. Vol.8, pp.377-388.

HSIEH, D.A. (1989).- *Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates*, Journal of Business. Vol.62(3), pp.339-368.

KING, B.F. (1966).- *Market and Industry Factors in Stock Price Behavior*, Journal of Business. Enero, pp. 139-190.

LINTNER, J. (1965).- *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, Review of Economics and Statistics. Vol. 47, pp. 13-37.

MARKOWITZ, H. (1952).- *Portfolio Selection*, Journal of Finance. Marzo, pp. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959).- *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, Nueva York.

MOSSIN, J. (1966).- *Equilibrium in a Capital Asset Market*, Econometrica. Vol. 34(4), pp. 768-783.

NELSON, D.B. (1991).- *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica. Vol. 59, pp.347-370.

NIJMAN, T. y E. SENTANA (1996).- *Marginalization and Contemporaneous Aggregation in Multivariate GARCH Processes*, Journal of Econometrics. Vol. 71, pp.71-87.

PLOBERGER, W., W. KRÄMER, K. KONTRUS (1989).- *A new test for structural stability in the linear regression model*. Journal of Econometrics, 40, p.307-318.

RABEMANANJARA, R. y J.M. ZAKOIAN (1993).- *Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility*, en M.H. Pesaran y S.M. Potter (eds.) *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*. John Wiley and Sons, Ltd.

SHARPE, W. F. (1963).- *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science, Vol. IX(2) Enero, pp. 277-293.

SHARPE, W. F. (1964).- *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*, Journal of Finance. Vol. XIX(3), pp. 425-442.

TOBIN, J. (1958).- *Liquidity Preference of Market Value of Risky Assets*, Review of Economic Studies, Vol. 26, pp. 65-86.

TREYNOR, J. L. (1965).- How to Rate Management of Investment Funds*, Harvard Business Review. Enero-febrero, pp. 63-75.*

WAGNER, W.H. y S. C. LAU (1971).- The Effect of Diversification on Risk*, Financial Analysts Journal, 27, pp. 48-53.*

WOLFF, C.C.P. (1988).- *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. A Comparison of ARCH and Random Coefficient Models*, Economics Letters. Vol. 27, pp.141-143.

ZAFFARONI, P. (2000).- *Contemporaneous Aggregation of GARCH Processes*, Discussion Paper No. EM/00/378. STICERD/Econometrics, London School of Economics and Political Science.